MA1 - zápočtový test č.3 opravný . Návrh řešení (mojí řešení) (a trošku vysvětlení)
Jméno a příjmení : Hodnocení :

Určete definiční obory a obory, kde existují derivace následujících funkcí a tyto derivace vypočítejte :

1. $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}$; $D_f = \{x\in\mathbb{R};\ x^2\neq 1\} = \{x\in\mathbb{R};\ x\neq\pm 1\}$

a asi lépe se zde derivuje podíl než součin ;

$$f'(x) = \frac{(x^3)'(x^2-1) - x^3(x^2-1)'}{(x^2-1)^2} = \frac{3x^2(x^2-1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2} =$$

$$= \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2} \quad , \quad D_{f'} = D_f$$

2. $f(x)=e^{-x^2}.\cos^3(2x)$; $D_f = \mathbb{R} = D_{f'}$

$$f'(x) = \left(e^{-x^2}\right)'\cos^3(2x) + e^{-x^2}.\left(\cos^3(2x)\right)' = e^{-x^2}(-2x).\cos^3(2x) +$$

(součin + derivace složených funkcí)

$$+ e^{-x^2}.3\cos^2(2x).(\cos 2x)' = e^{-x^2}(-2x)\cos^3(2x) + 3e^{-x^2}\cos^2(2x).(-\sin 2x).2 =$$

$$= -2\,e^{-2x}.\cos(2x)\left(x\cos(2x) + 3\sin 2x\right)$$

3. $f(x)=\dfrac{4}{\left(x^3-8\right)^3}$; $D_f = (-\infty,2)\cup(2,+\infty)$ $\quad (x^3\neq 8 \Leftrightarrow x\neq 2)$

$$f'(x) = \left(4(x^3-8)^{-3}\right)' = 4.(-3)(x^3-8)^{-4}.(x^3-8)' = -12(x^3-8)^{-4}.3x^2 =$$

$$= -36x^2(x^3-8)^{-4}$$

Pozn.: asi jednodušší úsek :

$(c\,f(x))' = c\,f'(x))$ (než derivoval $c.f(x)$ jako součin)

4. $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+1}{x-2}}$: $D_f = \left\{x\in\mathbb{R};\ \dfrac{x+1}{x-2}\geq 0\right\} = (-\infty,-1\rangle \cup (2,+\infty)$

$$f'(x) = \left(\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{-1/2}.\left(\frac{x+1}{x-2}\right)' = \frac{1}{2}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{-1/2}.\frac{(x-2)-(x+1)}{(x-2)^2}$$

složená fce $\quad (\Rightarrow x\neq -1)$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{-1/2}.\frac{-3}{(x-2)^2}$$

$D_{f'} = (-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$

A poznámka : $\sqrt{\dfrac{x+1}{x-2}} = \dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-2}}$ platí jen v intervalu $(2,+\infty)$,

kde $x+1\geq 0$ i $x-2>0$, ale ne v intervalu $(-\infty,-1\rangle$: $x+1\leq 0$ a $x-2<0$!

(zlomek je ale ≥ 0 !)

5. $f(x)=\sqrt{x}\cdot\sin(\sqrt{x})$; $\mathcal{D}f=\{x\in R;\ x\geq 0\}=\langle 0,+\infty),$ ale $\mathcal{D}f'=(0,+\infty)$:

$$f'(x)=(\sqrt{x})'\sin(\sqrt{x})+\sqrt{x}\,.(\sin\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin\sqrt{x}+\sqrt{x}\,.\cos\sqrt{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}+\cos\sqrt{x}\right),\quad x>0\ !$$

6. V příkladu 5. vypočítejte i derivaci v bodě $x=0$ zprava.

$$a\ \underset{\text{z definice}}{f'(0+)}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{\sqrt{x}\sin\sqrt{x}}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\underset{\text{VLSF}}{\overset{(\sqrt{x}=t)}{=}}$$

$$\lim_{t\to 0+}\frac{\sin t}{t}=1\ \left(\underset{\text{(Tabulková limita)}}{}\ \overset{\text{nebo}}{\underset{l'H}{=}}\ \lim_{t\to 0}\frac{\cos t}{1}=1\right)$$

$$\text{nebo}\quad f'(0+)=\lim_{x\to 0+}f'(x)=\lim_{x\to 0+}\frac{1}{2}\left(\underbrace{\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}_{\to 1}+\underbrace{\cos\sqrt{x}}_{\to 1}\right)=\frac{1}{2}\cdot 2=1$$

(neboť f je spojitá v $0+$)

7. $f(x)=(\ln x)^x$

dle definice: $f(x)^{g(x)}=e^{g(x)\ln f(x)}$, Def. obor: $g(x)$ je def. a $f(x)>0$

$$\text{Dále: }\left((\ln x)^x\right)'=\left(e^{x\ln(\ln x)}\right)'=e^{x\ln(\ln x)}\underbrace{(x\ln(\ln x))'}_{\text{složená fce}}=$$

$$=(\ln x)^x\left(1.\ln(\ln x)+x.\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}\right)=(\ln x)^x\left(\ln(\ln x)+\frac{1}{\ln x}\right)$$

$$\mathcal{D}f=\{x\in R;\ \ln x>0\}=(1,+\infty)=\mathcal{D}f'$$

8. Spočítejte limitu $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-x^2}-1}{\cos x-1}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x^2}-1}{\cos x-1}=\text{„}\frac{0}{0}\text{“}\underset{l'H.}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x^2}(-2x)}{-\sin x}\overset{*}{=}\lim_{x\to 0}2e^{-x^2}\cdot\underbrace{\frac{x}{\sin x}}_{\to 1\,(T)}=\underline{\underline{2}}$$

$$\text{nebo }(l'H.)\overset{*}{=}\lim_{x\to 0}2\frac{(e^{-x^2}.x)'}{(\sin x)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}2\,\frac{\overbrace{e^{-x^2}(-2x).x}^{\to 0}+\overbrace{e^{-x^2}}^{\to 1}}{\underbrace{\cos x}_{\to 1}}=2$$

9. Spočítejte limitu $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot e^{\frac{1}{x}}$.

(*) $\lim\limits_{x\to0} x e^{\frac{1}{x}}$ – zde je problém v limitě $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}$, která neexistuje, neboť $\lim\limits_{x\to0+}\frac{1}{x}=+\infty$ a $\lim\limits_{x\to0-}\frac{1}{x}=-\infty$, tedy je třeba limitu (*) „rozdělit" na $x\to0\pm$:

$$\lim_{x\to0+} x e^{\frac{1}{x}} = „0\cdot e^{\infty}" = \lim_{x\to0+}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = \frac{\infty}{\infty} \overset{*}{\underset{l'H.}{=}} \lim_{x\to0+}\frac{e^{\frac{1}{x}}\cancel{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}}{\cancel{-\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to0+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$$

(nebo $\underset{VLSF}{=}$ $\left(\frac{1}{x}=t\right)$ $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{e^t}{t} \underset{l'H.}{=} \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{t\to\infty}\frac{e^t}{1}=\infty$)

a $\lim\limits_{x\to0-} x e^{\frac{1}{x}} = „0\cdot e^{-\infty}" = „0\cdot 0" = 0$ (zde jednoduché!)

ale $\lim\limits_{x\to0-} e^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{t\to-\infty} e^{t} = 0$!

10. Spočítejte limitu $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\cdot\ln(1-\frac{2}{x^2})$.

$$\lim_{x\to\infty} x^2\ln\left(1-\frac{2}{x^2}\right) = „\infty\cdot\ln\Big(1-\underbrace{\tfrac{1}{\infty}}_{\to0}\Big)" = „\infty\cdot 0" \overset{\text{tedy}}{=}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1-\frac{2}{x^2}\right)}{\frac{1}{x^2}} \overset{*}{=} \lim_{t\to0}\frac{\ln(1-2t)}{t} = \frac{0}{0} \underset{l'H.}{=}$$

zde nejlépe VLSF $\frac{1}{x^2}=t\to0$

$$= \lim_{t\to0}\frac{\frac{1}{1-2t}(-2)}{1} = -2 \quad \left(\lim_{t\to0}\frac{1}{1-2t}=1\right)$$

<u>lze i bez VLSF</u>: $\overset{*}{\underset{l'H.}{=}} \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{1}{1-\frac{2}{x^2}}\cdot\cancel{\frac{4}{x^3}}}{-\cancel{\frac{2}{x^3}}} = -2\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{1-\underbrace{\frac{2}{x^2}}_{\to0}} = -2.$

(při užití VLSF je „lehčí" derivování v l'H. pravidlu)